

Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

[Bec] : *Objectif agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Bri-Pag] : *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès

[Can] : *Calcul intégral*, Bernard Candelpergher

[Chi] : *Chemin d'analyse Tome 1*, David Chiron

[Dem] : *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

[Rom] : *Analyse réelle*, Jean-Étienne Rombaldi

I Partie A - Continuité, dérivabilité [Gou][Rom]

I.1 Continuité

■ **Déf 1 (Continuité) :**

■ **Ex 2 :** Fonctions polynomiales, exponentielle...

■ **Cor 3 :** Soit $F : E \rightarrow F$ continue et bijective. Si E est compact, alors f^{-1} est continue.

■ **Prop 4 :** Si f est une fonction continue sur un compact à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors elle atteint ses bornes.

App 5 : Une application coercive sur $\mathbb{R}$ admet un minimum.

Rem 6 : Existence d'extrema

I.2 Dérivabilité [Chi]

■ **Déf 7 (Dérivabilité) :**

Rem 8 : Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

■ **Ex 9 :** $x \rightarrow x^2 \sin(1/x)$ est dérivable mais sa dérivée n'est pas continue.

■ **Contre-Ex 10 :** $x \rightarrow |x|$ n'est pas dérivable en 0.

■  **Dév 11 (Fonction de Weierstrass) :**

■ **Prop 12 :** f est dérivable en a si et seulement si $\exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) = f(a) + (x-a)\ell + o(x-a)$.

■ **Prop 13 (Opérations sur la dérivation) :**

■ **Prop 14 (Rolle) :**

■ **Ex 15 :** Zéros de polynômes

■ **Thm 16 (Égalité des accroissements finis) :**

■ **Contre-Ex 17 :** $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(t) = e^{it}$.

■ **Cor 18 (Inégalité des accroissements finis) :**

■ **Thm 19 (Darboux) :**

II Partie B - Régularité et compacité [Gou][Li]

II.1 Continuité et compacité [Ber-Ber]

■ **Déf 20 (Uniforme continuité) :**

■ **Ex 21 :** Fonctions lipschitziennes, α -hölderiennes.

■ **Contre-Ex 22 :**

■ **Thm 23 (Heine) :**

■ **Thm 24 (Weierstrass) :** Toute fonction continue sur un intervalle compact est limite uniforme de fonctions polynomiales.

■ **Thm 25 (Théorème de point fixe) :**

■ **Ex 26 :** Exemple du dev

II.2 Formules de Taylor

■ **Déf 27 (Dérivée d'ordre n) :**

■ **Prop 28 (Formule de Taylor-Lagrange) :**

■ **Prop 29 (Formule de Taylor reste intégral) :**

■ **Prop 30 (Lemme de Borel) :**

■ **Ex 31 :** Mettre des exemples ou contre exemple, voir [Rom] ou [Gou]

III Partie C - La convexité entre en action [Rom] [Bec]

Déf 32 (Fonction convexe, concave, strictement convexe, strictement concave) :

Ex 33 : La norme, les applications linéaires. Le déterminant est log-concave.

Ex 34 : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \lambda_{\max}(A)$ est convexe.

Prop 35 : Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi les applications "pentes" sont croissantes.

Cor 36 (Inégalité des trois pentes) :

Thm 37 (Continuité et dérivabilité à gauche et à droite sur $\mathbb{R}$) :

Cor 38 (Dérivabilité) :

Ex 39 (Valeur absolue) :

Prop 40 (Continuité sur $\mathbb{R}^n$) :

Contre-Ex 41 : Faux en dimension infinie (formes linéaires non continues).

Thm 42 (Caractérisation convexe pour les fonctions différentiables) :

Thm 43 (Caractérisation convexe pour les fonctions 2 fois différentiables) :

Ex 44 : Donner des exemples simples.

IV Partie D - Intégrales à paramètres[Gou] [Bri-Pag] [Can]

IV.1 Résultats élémentaires théoriques

Thm 45 (Continuité sous l'intégrale) :

Contre-Ex 46 : La fonction $f(x, t) = \frac{1}{x} e^{-(\ln(t/x))^2}$ est continue partiellement, mais $\varphi(x) = \int f(x, t) dt$ n'est pas continue en 0.

Thm 47 (Dérivabilité sous l'intégrale) :

Rem 48 : On peut obtenir le même genre de résultat pour de la classe $\mathcal{C}^k$ en ayant un chapeau intégrable pour chacune des dérivées.

Ex 49 : $\varphi(x) = \int \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ est dérivable sur $]0, +[$.

Contre-Ex 50 : La fonction $f(x, t) = \frac{x^3}{t^2} e^{-(x^2/t)}$ est continue, $t \rightarrow \partial_x f$ et $x \rightarrow \partial_x f$ sont continues et $\varphi(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$ est dérivable en 0, mais $\varphi'(0) = 1 \neq \int \partial_x f(x, t) dt$.

App 51 (Frullani) : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} dt = \ln(x) - \ln(a)$

IV.2 Exemple important

Ex 52 (Fonction Gamma) :

V Partie F - Régularité et développements asymptotiques

V.1 Formule d'Euler-Maclaurin [Dem]

Déf 53 (Polynômes de Bernoulli, nombres de Bernoulli) :

 **Dév 54 (Formule d'Euler Maclaurin) :**

 **Dév 55 (Application aux développements asymptotiques) :**

Ex 56 (Stirling) :

Ex 57 (Série harmonique) :

V.2 Utilisation de la régularité aux suites récurrentes [Rom]

Prop 58 : Soit f à valeurs réelles continue sur $] -1, 1[$, et admettant un DL en 0 de la forme : $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$. Alors on a le développement asymptotique sur les itérées :

$$x_n = \frac{A}{n^{1/p}} - B \frac{\ln(n)}{nn^{1/p}} + o\left(\frac{\ln(n)}{nn^{1/p}}\right),$$

avec A, B des constantes dépendants de p, α et β .

Ex 59 : Si $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$, $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.